Equations de transport avec conditions aux limites de type reflexion

R. Sentis

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 162

ÉQUATIONS DE TRANSPORT AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE RÉFLEXION

Rémi SENTIS

Septembre 1982

EQUATIONS DE TRANSPORT AVEC CONDITIONS

AUX LIMITES DE TYPE REFLEXION

Rémi SENTIS

I. N. R. I. A.

Résumé : On montre l'existence et l'unicité de solutions d'équations de transport avec conditions aux limites de type réflexion pour un opérateur de réflexion général.

Abstract : We prove the existence and the uniqueness of solutions to transport equations with boundary conditions of reflexion type for a general reflexion operator.

§ 0. INTRODUCTION

Les processus de transport avec réflexion sur le bord du domaine d'évolution du processus ont été étudié en détail d'un point de vue probabiliste dans Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1], mais avec une hypothèse assez restrictive qui exclut en particulier le cas de la réflexion spéculaire (c'est-à-dire le "rebondissement" parfait du processus sur le plan tangent au bord).

Nous proposons ici d'étudier les équations de transport avec condition aux limites du type réflexion associé à un opérateur R, sans faire appel à des notions probabilistes et en se plaçant dans un cadre suffisamment large pour que R puisse être l'opérateur de réflexion spéculaire ou un opérateur de réflexion introduit dans l'article précité.

C'est-à-dire des équations du type évolution (où $u=u(t,x,v)$) :

$$(0) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = Ku - \Sigma\, u \;, \\ u(t)\big|_{\Gamma-} = Ru(t)\big|_{\Gamma+} \;, \\ u(o) = u_o \;. \end{cases}$$

ou du type stationnaire (où $u=u(x,v)$) :

$$(0)' \qquad \begin{cases} v\dfrac{\partial u}{\partial x} = Ku - \Sigma\, u \;, \\ u\big|_{\Gamma-} = Ru\big|_{\Gamma+} \;. \end{cases}$$

(où K est un opérateur intégral en v et Σ une fonction positive; $\Gamma+$ et $\Gamma-$ étant les parties de la frontière où le flux sort et entre).

Donnons une interprétation physique de la solution de l'équation (0).

On considère un ensemble de particules se déplaçant linéairement et subissant des collisions avec un milieu stable, les vitesses des particules étant constantes entre deux collisions, et le nombre moyen de particules émises à chaque collision dépend de l'emplacement de la collision et de la vitesse de la particule incidente. Quand une particule atteint la vitesse frontière, elle peut être absorbée ou réfléchie selon une loi décrite par l'opérateur R.

Pour faire cette étude, nous considèrerons tout d'abord le semi-groupe associé à l'équation (où $u = u(t,x,v)$) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$u(t)|_{\Gamma-} = R\, u(t)|_{\Gamma+} \;, \qquad u(o) = \varphi \;.$$

et nous montrerons que c'est un semi-groupe à contraction sur un espace L^2, sous certaines hypothèses sur R. Nous montrerons alors l'existence et l'unicité de la solution des équations (o) et (o') sous certaines conditions, et de même pour les équations adjointes de ces dernières.

En appendice nous énonçons le résultat de l'approximation classique des équations de transport par des diffusions dans le cas des conditions aux limites de type réflexion.

§ 1. NOTATIONS. SEMI-GROUPE ASSOCIE A $(v\frac{\partial \cdot}{\partial x})$ AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE REFLEXION

Soit X un ouvert (borné ou non) de $\mathbb{R}^N$, de frontière ∂X régulière. Notons ν_x la normale à ∂X en tout point x de ∂X.

Soit V un fermé de $\mathbb{R}^N$, muni d'une mesure de probabilité $d\mu$.

Pour tout $x \in \partial X$, posons :

$$\Gamma_{x+} = \{v \in V/\nu_x . v > o\} \;, \qquad \Gamma_{x-} = \{v \in V/\nu_x . v < o\} \;,$$

$$\Gamma_{+} = \{(x,v) \in \partial X x V/\nu_x . v > o\} \;, \qquad \Gamma_{-} = \{(x,v) \in \partial X x V/\nu_x . v < o\} \;.$$

Notons γ la mesure surfacique naturelle sur ∂X, on suppose que :

$(\partial X x V) \backslash (\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$ est négligable pour la mesure $\gamma \otimes d\mu$ [Ceci sera le cas si $\mu(\mathrm{int}(V)) = 1$, ou si V est une variété de dimension N-1, μ étant la mesure surfacique naturelle et si le cône de sommet O engendré par V a un intérieur non vide]

Nous allons maintenant définir l'opérateur de réflexion R. Et pour cela nous allons introduire une notation :

Pour tout espace topologique Y, localement compact, notons B(Y) l'espace de Banach des fonctions f : Y → R bornées sur Y, mesurables par rapport à la tribu engendrée par les ouverts de Y et les négligables pour toutes les mesures sur Y.
Pour tout f : Y → R, on note sa norme :

$$\| f_o \| = \sup_{y \in Y} |f(y)| .$$

Pour tout $x \in \partial\Omega$, définissons l'opérateur R_x de $B(\Gamma_{x+})$ dans $B(\Gamma_{x-})$ par :

$$R_x g(v) = \int_{\Gamma x+} g(w)\ \pi_x(v,w) ;$$

$$\text{où} \quad (1.2) \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \pi_x(v,.) \text{ est une mesure positive sur } \Gamma_{x+}, \text{ de masse inférieure ou égale à } 1 ; \\ \text{ii)} & \forall A \subset \Gamma_{x+} \quad (x,v) \to \pi_x(v,A) \text{ est mesurable} ; \\ \text{iii)} & \text{Si } g_1 = g_2 \ \mu\text{-p.p. sur } \Gamma_{x+} \text{ alors } Rg_1 = Rg_2 \ \mu\text{-p.p. sur } \Gamma_{x-} ; \\ \text{iv)} & \displaystyle\int_{\Gamma-} \left[\int g(x,v)\ \pi_x(v,dw) \right]^2 |n_x.v|\, d\gamma(x)\, d\mu(v) \leq \int_{\Gamma_+} |g(x,v)|^2\, n_x.v\, d\gamma(x)\, d\mu(v) , \\ & \forall \quad \in L^2(\Gamma_+) . \end{array} \right.$$

On omettra souvent d'écrire le paramètre x et on pourra alors considérer R comme un opérateur de $B(\Gamma_+)$ dans $B(\Gamma_-)$ et même grâce à iii) comme un opérateur de $L^\infty(\Gamma_+)$ dans $L^\infty(\Gamma_-)$ qui est une contraction (à cause de i).

Dans la suite nous considèrerons les espaces :

$$L^2(\Gamma_+) = \{f : \Gamma_+ \to \mathbb{R} \ / \int_{\Gamma_+} |f(x,v)|^2\ \nu_x.v\ d\mu(v) d\gamma(x) < \infty\} ,$$

$$L^2(\Gamma_-) = \{g : \Gamma_- \to \mathbb{R} \ / \int_{\Gamma_-} |g(x,v)|^2 |\nu_x.v|\ d\mu(v) d\gamma(x) < \infty\} ,$$

$$\| f \|^2_{\Gamma+} = \int_{\Gamma+} |f(x,v)|^2\ \nu_x.v\ d\mu(v)\ d\gamma(x) ,$$

$$\| g \|^2_{\Gamma-} = \int_{\Gamma-} |g(x,v)|\ |\nu_x.v| d\mu(v)\ d\gamma(x) .$$

L'opérateur R est donc une contraction de $L^2(\Gamma_-)$ dans $L^2(\Gamma_+)$.

Donnons maintenant deux exemples d'opérateurs R :

Exemple 1 : Réflexion spéculaire. Ici V est une réunion de sphères centrées en O. Soit π défini par :

$$\pi_x\ (v,.) = \alpha(x)\ \delta_{v-2\ (\nu_x.v)\nu_x} \ , \qquad \text{où } \delta \text{ est la masse de Dirac } \alpha \in B\ (\partial\Omega\ )\quad 0\leq \alpha \leq 1$$

alors (2.10) est vérifié et on a :

$$R_x\ g(v) = \alpha(x)\ g(v-2(\nu_x.v)\ \nu_x)\ , \qquad \forall\ (x,v) \in \Gamma_-\ .$$

La réflexion pure correspond à $\alpha = 1$; le cas ou $\alpha < 1$ correspond à une réflexion avec absorbtion partielle.

Exemple 2 : Réflexion isotrope.

Soit π définit par :

$$\pi_x\ (v,dw) = \alpha\ (x)\ \nu_x.w\ \ d\ \mu(w)\ \ \frac{1}{\int_{\Gamma_{x+}} \nu_x.w\ d\mu\ (w)}\ .$$

On voit alors que (2.10) est vérifié ; en effet iv) est une conséquence de :

$$\left[\int_{\Gamma_{x+}} g(w)\ \ \pi_x(v,dw)\right]^2 = \alpha(x)^2\left[\frac{\int_{\Gamma x+} g(x,w)\ \ \nu_x.w\ d\mu\ (w)}{\int_{\Gamma x+}\ \nu_x.w\ \ d\mu\ (w)}\right]^2 \leq \frac{\int_{\Gamma x+} |g(x,w)|^2\ \nu_x.w\ d\mu}{\int_{\Gamma x+} \nu_x.w\ d\mu(w)}\ .$$

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats classiques concernant l'opérateur $(v.\frac{\partial}{\partial x})$ que nous noterons dans la suite $(v.\nabla)$ (voir par exemple Bardos[1]).

Posons :

$$W_2 = \{\ u \in L^2(X \times V)\ /\ v.\nabla\ u \in L^2\ (X \times V)\}\ ,$$

$$W\ = \{\ u \in W_2\ /\ u|_{\Gamma+} \in\ L^2(\Gamma_+)\ \ \text{et}\ u|_{\Gamma-} \in L^2(\Gamma_-)\}\ .$$

On a, pour tout u de W_2 : $u\ |_{\Gamma+} \in L^2_{loc}\ (\Gamma_+)$ $\ u|_{\Gamma-} \in L^2_{loc}(\Gamma_-\ )$ et d'autre part :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{si } u \in W_2 \text{ et } u|_{\Gamma+} = 0\ , & \text{alors } u \in W\ ; \\ \text{si } u \in W_2 \text{ et } u|_{\Gamma_-} = 0\ , & \text{alors } u \in W; \\ \quad W_2 \cap L^\infty\ (X \times V) \subset W\ . & \end{array}\right.$$

Et on a la formule de Green $\forall$ u, w $\in$ W (en notant $(.,.)_{L^2}$ le produit dans $L^2(X.V)$)

$$(1.4)\quad (u,v.\nabla w)_{L^2} + (w,v.\nabla u)_{L^2} = \int_{\Gamma+} uw \quad \nu_x.v \, d\mu(v)\, d\gamma(x)$$

$$- \int_{\Gamma_-} uw \, |\nu_x.v| \, d\mu(v)\, d\gamma(x)$$

Fixons $t_o > 0$, nous allons énoncer les résultats ci-dessus quant X et V sont remplacés par :

$$[o,t_o] \times X \quad \text{et} \quad \{1\} \times V$$

Alors Γ_+ et Γ_- sont respectivement remplacés par :

$$([o,t_o] \times \Gamma_+) \cup (\{t_o\} \times X \times V) \text{ et } ([o,t_o] \times \Gamma_-) \cup (\{o\} \times X \times V)$$

Posons alors :

$$\mathcal{W}_2 = \{ u \in L^2([o,t_o] \times X \times V) \;/\; \frac{\partial u}{\partial t} + v\nabla u \in L^2([o,t_o] \times X \times V)\}$$

$$\mathcal{W} = \{ u \in W_2 \;/\; u\big|_{[o,t_o] \times \Gamma_+} \in L^2([o,t_o] \times \Gamma_+) ;$$

$$u\big|_{[o,t_o] \times \Gamma_-} \in L^2([o,t_o] \times \Gamma_-)\}$$

On a alors pour tout u de W_2 :

$$u\big|_{[o,t_o] \times \Gamma_+} \in L^2_{loc}([o,t_o] \times \Gamma+) ; \; u_{[o,t_o] \times \Gamma_-} \in L^2([o,t_o] \times \Gamma_-)$$

$$u(o) \in L^2(X \times V) \qquad u(t_o) \in L^2(X \times V)$$

Et d'autre part :

$$(1.5)\quad \mathcal{W}_2 \cap L^\infty([o,t_o] \times X \times V) \subset \mathcal{W}$$

Et on a $\forall\, u,w \in \mathcal{W}$:

$$\int_o^{t_o} \left(u(t), \frac{dw}{dt} + v \nabla w\right)_{L^2} + \left(w(t), \frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u\right)_{L^2} dt = (u(t_o),w(t_o))_{L^2} - (u(o),w(o))_{L^2}$$

$$+ \int_o^{t_o} \left(< u(t)\Big|_{\Gamma_+}, w(t)\Big|_{\Gamma+} >_{\Gamma+} - < u(t)\Big|_{\Gamma-} w(t)_{\Gamma -} >_{\Gamma-}\right) dt$$

sachant que l'on note $<.,.>_{\Gamma_+}$ $<.,.>_{\Gamma_-}$ les produits scalaires de $L^2(\Gamma_+)$ et $L^2(\Gamma_-)$

Nous allons maintenant construire un semi-groupe G_t d'opérateur sur $L^2(XxV)$ puis nous montrerons que si $u(t) = G_t\varphi$ pour tout φ dans $L^2(XxV)$ alors u est solution de :

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u = 0 \\ u(t)\Big|_{\Gamma-} = Ru(t)\Big|_{\Gamma+} \\ u(o) = \varphi \end{cases}$$

Mais pour cela nous devons nous placer momentanément dans l'espace $B(XxV)$ et construire G_t sur cet espace en l'approchant par des semi groupes G_t^δ pour $\delta < 1$; $\delta \to 1$. Pour tout $(x,v) \in XxV$ notons

$$t(x,v) = \inf \{ s > 0 \,/\, x-vs \notin X \}$$

Fixons donc $\delta < 1$. Pour tout $\varphi \in B(\overline{X} \times V)$, montrons donc qu'il existe $u_\varphi^\delta \in B\,[o,t_o] \times \overline{X} \times V)$ [pour $t_o > o$], vérifiant (χ étant la fonction indicatrice)

$$(1.8)\quad u_\varphi^\delta(t,x,v) - \chi_{t < t(x,v)}\, \varphi(x-vt,v) = \delta\, \chi_{t \geq t(x,v)}\, Ru_\varphi^\delta\,(t-t(x,v,.)(x-vt(x,v);v)$$

En effet si on note $\mathcal{R}^\delta$ l'opérateur qui à u^δ associe le second membre de (1.8) on voit que $\mathcal{R}^\delta$ est une contraction stricte sur $B\,[o,t_o] \times \overline{X} \times V)$ et (1.8) est équivalent à :

$u_{\varphi}^{\delta} - \mathcal{R}^{\delta} u_{\varphi}^{\delta} = \chi_{\varphi}$ avec $(\chi_{\varphi})(t,x,v) = \chi_{t<t(x,v)} \varphi(x-vt,v)$;

donc :

$$(1.9) \qquad u_{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{R}^{\delta})^k (\chi_{\varphi}) .$$

L'application $\varphi \to u_{\varphi}^{\delta}$ est continue de $B(\overline{X} \times V)$ dans $B([o,t_o] \times \overline{X} \times V)$ donc l'application $\varphi \to u_{\varphi}^{\delta}(t,.)$ est un opérateur continu sur $B(\overline{X} \times V)$. D'autre part on peut vérifier facilement que la famille d'opérateurs $\varphi \to u_{\varphi}^{\delta}(t,.)$ forme un semi-groupe sur $B(\overline{X} \times V)$, qui n'est pas C^o, noté G_t^{δ}.

Donnons des propriétés de ce semi groupe, afin de pouvoir passer à la limite quand $\delta \to 1$.

<u>Proposition 1</u> - Soit $\varphi \in B(\overline{X},V)$ vérifiant :

$$0 \leq \varphi(x,v) \leq 1, \qquad \forall x,v ;$$

alors on a :

i) $\quad 0 \leq u^{\delta}(t,x,v) \leq 1, \qquad \forall x,v \quad \forall \delta < 1$;

ii) $\quad u^{\lambda}(t,x,v) \leqslant u^{\delta}(t,x,v), \qquad \forall x,v \quad \forall \delta,\lambda \ (\lambda \leq \delta < 1)$,

<u>Preuve</u>

i) D'après (1.9) et la positivité de $\mathcal{R}^{\delta}$, on a :

$$0 \leq \varphi \Longrightarrow 0 \leq G_t^{\delta} \qquad \forall t$$

Il suffit maintenant de montrer que si $\varphi = 1$, on a $u_1^{\delta}(t,.) \leq 1$.

Or on a :

$$1 - u_1(t,x,v) = 1 - \chi_{t \leq t(x,v)} - \delta\chi_{t \geq t(x,v)} + \delta\chi_{t \geq t(x,v)} R(1-u_1(t-t(x,v))$$

$$(x-vt(x,v),v)$$

$$= (1-\delta)\chi_{t \geq t(xv)} + \mathcal{R}^{\delta}(1-u_1)$$

Donc de même que précédement on a :

$$(1-u_1) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{R}^{\delta})^k \, [\,(1-\delta)\, \chi_{t \geq t(xv)}\,] \geq 0 \, .$$

ii) Supposons maintenant $\lambda \leq \delta \leq 1$, et notons u_φ^δ et u_φ^λ les solutions correspondantes de (1.9). On a :

$$u_\varphi^\lambda - u_\varphi^\delta = \mathcal{R}^\lambda \, u_\varphi^\lambda - \mathcal{R}^\delta \, u_\varphi^\delta = \mathcal{R}^\lambda \, (u_\varphi^\lambda - u_\varphi^\delta) + (\lambda-\delta) \, \frac{1}{\delta} \, \mathcal{R}^\delta u^\delta \, .$$

Donc pour $\varphi \geq 0$ on a :

$$0 \leq u_\varphi^\lambda - u_\varphi^\delta \, . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Grâce au lemme 1, on voit que lorsque $\delta \to 1$, pour tout $\varphi \in B(\overline{X} \times V)$, $\varphi \geq 0$, les fonctions $u_\varphi^\delta\,(t,.)$ convergent ponctuellement vers une fonction mesurable bornée que l'on note $u_\varphi\,(t,.)$:

$$(1.10) \quad u_\varphi^\delta\,(t,x,v) \longrightarrow u_\varphi\,(t,x,v) \qquad \forall\,(x,v) \quad \text{quand} \quad \delta \to 1$$

Par combinaison linéaire on voit que (1.10) est vrai pour tout $\varphi \in B(\overline{X} \times V)$. D'après le théorème de convergence dominée on a :

$$R\, u_\varphi^\delta \Big|_{\Gamma+} \longrightarrow R\, u_\varphi \Big|_{\Gamma+} \qquad \text{quand} \quad \delta \to 1$$

Et en faisant tendre δ vers 1 dans (1.8) on obtient :

$$(1.11) \quad u_\varphi\,(t,x,v) - \chi_{t < t(x,v)} \quad \varphi(x - vt,\, v) = \chi_{t \geq t(x,v)}$$

$$R\, u_\varphi\,(t - t(x,v)\,,\, .)\,(x - vt\,(x,v)\,,\, v) \, .$$

On vérifie alors très simplement que les opérateurs $\varphi \to u_\varphi\,(t,.)$ pour $t \geq 0$, forment un semi-groupe sur $B(\overline{X} \times V)$, qui n'est pas fortement continu sur $B(\overline{X} \times V)$ et que l'on note G_t :

$$G_t \; \varphi = u_\varphi\,(t,.) \qquad \forall\, \varphi \in B(\overline{X} \times V)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.

i) G_t peut s'étendre à un semi-groupe fortement continu de contractions sur $L^2(X \times V)$

ii) Si on a $\varphi \geq 0$ p.p. alors $G_t\varphi \geq 0$ p.p.

Et on a : $G_t 1 \leq 1$ p.p.

iii) Posons : $A_R = -v.\nabla\varphi$, $\forall\varphi \in D(A_R)$;

$$D(A_R) = \{ \varphi \in L^2(X \times V) \;/\; v.\nabla\varphi \in L^2(X \times V) \;; \varphi\big|_{\partial X \times V} \in L^\infty(\partial X \times V) \;; \quad \varphi\big|_{\Gamma-} = R\varphi\big|_{\Gamma+} \}$$

Alors A_R est dissipatif [c'est-à-dire $(A_R\varphi, \varphi) \leq 0$ $\forall\varphi \in D(A_R)$] et de domaine dense. C'est une restriction du générateur infinitésimal de G_t.

Remarque. On ne peut appliquer le résultat général disant qu'un opérateur maximal dissipatif de domaine dense est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, car A_R n'est pas maximal (il n'est pas non plus fermé). Notons $\overline{A}_R$ le générateur infinitésimal de G_t. $\overline{A}_R$ est alors l'opérateur maximal prolongeant A_R, et il est fermé. Il y a une difficulté que l'on ne rencontre pas dans le cas des conditions aux limites d'absorbtion où le domaine du générateur est $\{ \varphi \in L^2(X \times V) \;/\; v\nabla\varphi \in L^2(X \times V) \;\varphi\big|_{\Gamma-} = 0 \}$; ici en effet la condition " $\varphi \in L^2(X \times V) \;/\; v\nabla\varphi \in L^2(X \times V) \;\varphi\big|_{\Gamma-} = R\varphi\big|_{\Gamma+}$ " n'a pas de sens car si

$\varphi \in L^2(X \times V)$ et $v\nabla\varphi \in L^2(X \times V)$; $\varphi\big|_{\Gamma-}$ et $\varphi\big|_{\Gamma+}$ ne sont pas nécessairement dans $L^2(\Gamma_\pm)$.

Mais si on impose de plus $\varphi\big|_{\partial X \times V} \in L^\infty(\partial X \times V)$ alors $\varphi\big|_{\Gamma+} \in L^2(\Gamma_\pm)$.

Preuve de la proposition

i) Considérons l'espace

$$C_1 = \{ \ u \in C(\overline{X} \times V) \text{ t.q. } \quad \nabla u \in L^\infty (X \times \overline{V}) \ \} .$$

Comme cet espace est dense dans $L^2 (X \times V)$, pour montrer que G_t est à contraction dans $L^2 (X \times V)$ il suffit de montrer que :

$$\| G_t \|_{L^2(X \times V)} \leqslant \| \varphi \|_{L^2 (X \times V)} \qquad \forall \varphi \in C_1 \ , \quad \forall t \ .$$

Et d'après la convergence (1.10), il suffit de montrer que :

$$(1.12) \quad \| G_t^\delta \varphi \|_{L^2} \leqslant \| \varphi \|_{L^2} \qquad \forall \varphi \in C_1, \forall t, \forall \delta < 1 \ .$$

Or on vérifie immédiatement que si $\varphi \in C_1$ et $u_\varphi^\delta = G_t^\delta \varphi$, alors on a :

$$u_\varphi^\delta \in B(\overline{X} \times V)$$
$$\nabla u_\varphi^\delta \in B(\overline{X} \times V)$$

et de plus, en faisant tendre t vers t_1 dans l'expression (1.8), on a :

$$(1.13) \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varphi^\delta}{\partial t} = -v \nabla u_\varphi^\delta & \forall \ t_1 \quad \forall \ (x,v) \in X \times V \ ; \\ u_\varphi^\delta = \delta R \ u_\varphi^\delta & \forall \ t \quad \forall \ (x,v) \in \partial X \times V \ ; \\ u_\varphi^\delta \ (0,.) = \varphi & (x,v) \in X \times V \ . \end{cases}$$

Comme $u_\varphi^\delta \in \mathcal{W}_2$ et que u_φ^δ est dans $B(\overline{X} \times V)$ on sait que $u_\varphi^\delta \in \mathcal{W}$.

donc on peut appliquer la formule de Green à u^δ_φ et on obtient :

$$2(-v\,\nabla u^\delta_\varphi(t,.),\ u^\delta_\varphi(t,.))_{L^2} = \int_{\Gamma_-} |u_\varphi(t,.)|^2 |\nu_x.v|\, d\gamma\, d\mu - \int_{\Gamma_+} |u_\varphi(t,.)|^2\, \nu_x.v\, d\gamma\, d\mu$$

$$\leq \delta^2 \int_{\Gamma_-} [\, Ru_\varphi(t,.)|_{\Gamma_+}]^2 |\nu_x.v|\, d\gamma\, d\mu - \int_{\Gamma_+} |u\ (t,.)|_{\Gamma_+}|^2 \nu_x.v\, d\gamma\, d\mu \leq 0\ .$$

La dernière inégalité est une conséquence de (1.2-iv). On en déduit en utilisant (1.13) :

$$\frac{d}{dt}\ \| u^\delta_\varphi\|_{L^2} \leq 0\ .$$

D'où (1.12). D'autre part on a pour tout $\varphi \in C_1$.

$$G_t\,\varphi(x,v) \longrightarrow \varphi(x,v)\,, \qquad \text{p.p. } (x,v)\,;$$

donc $G_t\,\varphi \to \varphi$ dans $L^2(X \times V)$.

ii) D'après le lemme précédent on a :

$$G^\delta_t\, 1 = u^\delta_1\,(t,.) \leq 1\,, \qquad \forall\, x,v\ .$$

D'où :

$$G_t\ 1\ (x,v) \leq 1\,, \qquad \forall\, x,v\ .$$

D'autre part pour $\varphi \in B(\overline{X} \times V)$, $\varphi \geq 0$ on a $G_t\varphi \geq 0$. Comme $B(\overline{X} \times V)$ est dense dans $L^2\,(X \times V)$ on en déduit le point ii)

iii) Soit $\varphi \in D(A_R)$. Prenons un représentant de φ partout defini, mesurable par rapport à la tribu complète de $(\overline{X} \times V)$ et posons :

$$\varphi_n\ (x,v) = \sup\ \{ -n,\ \inf\ (n,\ \ (x,v)\ )\ \}$$

Alors on a :

$$\varphi_n \in B(\overline{X} \times V)$$

Et de plus :

$\varphi_n \to \varphi$ p.p. dans X x V quand n

$\varphi_n = \varphi$ p.p. dans ∂X x V pour n assez grand .

Donc d'après le i) on a :

$G_t \varphi_n \to G_t \varphi$ dans L^2 (X x V) quand $n \to \infty$

Quitte à extraire une sous suite de $G_t \varphi_n$, encore notée $G_t \varphi_n$ on a :

$G_t \varphi_n \to G_t \varphi$ p.p. dans X x V

Appliquons (1.11) à φ_n et faisons tendre n vers l'infini, alors on voit que l'on a :

$$G_t \varphi - \chi_{t < t(x,v)} \varphi(x-vt,v) = \chi_{t \geq t(x,v)} RG_t \varphi(t-t(x,v),.)(x-vt(x,v),v),$$

p.p. x,v .

Donc en faisant tendre t vers O on obtient :

$$\frac{1}{t}(G_t \varphi - \varphi) \longrightarrow -v\nabla\varphi \,, \qquad \text{p.p. X x V .}$$

donc aussi dans L^2(X x V) car $v\nabla\varphi \in L^2$(X x V). Donc φ est bien dans le domaine du générateur de G_t. Comme $\mathcal{D}$ (X x V) est inclus dans $D(A_R)$ on voit que $D(A_R)$ est dense dans L^2(X x V). D'autre part d'après le même calcul qu'au i) on a :

$$(A_R \varphi, \varphi) \leq 0 \,, \qquad \forall \varphi \in D(A_R). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On peut donc appliquer les résultats généraux sur les semi-groupes.

. Tout d'abord supposons $\varphi \in D(A_R) \subset D(\overline{A}_R)$, alors il existe une unique solution u de (1.7) dans C $(o,+\infty; L^2$(X x V)) tel que $v\nabla u, \frac{\partial u}{\partial t} \in C(o,+\infty; L^2(X \times V))$ et on a :

$$u(t,.) = G_t \varphi \qquad \forall\, t$$

(1.7 - ii) s'interprète alors de la façon suivante :

$$u(t,.) \in D(\overline{A}_R) \qquad \forall\, t$$

. Rappelons maintenant une propriété des semi-groupes (voir par exemple Bardos [2]) : Soit $\mathcal{B}$ un Banach et $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe $\{e^{t\mathcal{A}}\}$ fortement continu sur $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ étant le domaine de $\mathcal{A}$. Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ et $g \in L^2(o,T,\mathcal{B})$, $\forall\, T > 0$. Donnons la définition suivante

On appelle solution faible de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A} u + g \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

la fonction u de $C(o,T;\mathcal{B})$ donnée par :

$$(1.14) \quad u(t) = e^{t\mathcal{A}} \varphi + \int_0^t e^{(t,s)\mathcal{A}} g(s)\, ds$$

On a alors en notant $\mathcal{B}^*$ le dual de $\mathcal{B}$, et $\mathcal{A}^*$ le dual de $\mathcal{A}$ de domaine $D(\mathcal{A}^*)$:

$$\begin{cases} \int_0^T (u(t), \dfrac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{A}^* p(t) + \int_0^T (g(t), p(t) = (u(T),p(T)) - (\varphi,p(0)) \\ \forall\, p \in ((o,T;\mathcal{B}^*)_n \; L^2(o,T\,;\,D(\mathcal{A}^*)) \text{ tel que } \dfrac{\partial p}{\partial t} \in L\,(o,T;\mathcal{B}^*) \end{cases}$$

(ceci est bien la définition classique d'une solution faible)

Si $\mathcal{B}$ est réflexif, alors (1.14) et (1.15) sont équivalents.

⊗ Appliquons ce résultat ici. Pour tout φ dans $L^2(X \times V)$ il existe une unique solution faible u pour (1.7) et on a : $u(t,.) = G_t\,\varphi$

Mais on n'a pas nécessairement $u(t,.) \in D(A_R)$ $\forall t$, donc les conditions au bord ne sont pas explicitées immédiatement pour u.

Afin de mieux préciser les conditions au bord satisfaites par la solution u (que la condition initiale φ soit dans $D(A_R)$ ou non) il nous faudra prendre φ plus régulier, en fait φ bornée.

Enonçons maintenant le résultat d'existence d'une solution qui vérifie les conditions au bord en un sens raisonnable.

Proposition 3 Soit $\varphi \in L^2(X \times V) \cap L^\infty (X \times V)$, alors il existe une solution au sens des distributions, unique dans l'expace $\mathcal{W}$, pour l'équation :

$$(1.16)\quad \begin{cases} \text{i)} & \dfrac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u = 0 , & \text{p.p.t} ; \\ \text{ii)} & u(t)\big|_{\Gamma-} = Ru(t)\big|_{\Gamma+} , & \text{p.p.t} ; \\ \text{iii)} & u(o) = \varphi . \end{cases}$$

et on a :

$$u(t) = G_t\varphi \qquad u \in C([o,+\infty [, L^2 (X \times V)) \cap L^\infty ([o,\infty[\times X \times V) .$$

Nous ne démontrons pas ce résultat, car la démonstration est identique à celle que nous allons faire pour le Théorème 1, qui en est une généralisation.

§.2 - EQUATION DE TRANSPORT D'EVOLUTION (AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE REFLEXION)

Nous allons maintenant achever de définir l'opérateur de transport, Posons :

$$(2.1)\quad \Sigma \in L^\infty (X \times V); \quad \Sigma \geq 0 .$$

Et l'opérateur K borné de $L^2(X \times V)$ dans L $(X \times V)$ défini par :

$$(2.2)\quad K\, g(x,v) = \int \sigma (x,v,v')\, g(x,v')\, d\mu(v') \qquad \forall\, g \in L^2 (X \times V) ;$$

où :

$$(2.3)\quad \sigma \in L^2(X \times V \times V) \quad \sigma \geq 0 .$$

L'objet de ce paragraphe est l'étude de l'équation :

$$(2.4)\quad \begin{cases} \text{i)} & \dfrac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u = Ku - \Sigma u + q , & \text{p.p.t} ; \\ \text{ii)} & u(t)\big|_{\Gamma-} = R\, u(t)\big|_{\Gamma+} , & \text{p.p.t} ; \\ \text{iii)} & u(o) = \varphi . \end{cases}$$

où φ et q sont des données dont nous préciserons la régularité.

D'après les résultats généraux sur les générateurs infinitésimaux de semi groupe (voir par exemple Kato [1, chap. IX]) on sait que $(\overline{A}_R + K - \Sigma)$ de domaine $D(\overline{A}_R)$ est le générateur d'un semi groupe, fort $\frac{t}{-}$ continu sur $L^2(X \times V)$ que nous noterons $e^{(\overline{A}_R + K - \Sigma) t}$

Nous allons donner des propriétés de ce semi groupe, qui nous permettrons d'écrire explicitement un candidat pour la solution (2.4).

Proposition 4 On a pour tout $t \geq 0$

i) $e^{(\overline{A}_R + K - \Sigma)t} f \geq 0$ P.p. $\forall f$ $L(X \times V)$ $f \geq 0$ p.p

ii) $\exists \lambda \in R$ t.q $\| e^{(\overline{A}_R + K - \Sigma)t} \|_1 \leq e^{\lambda t}$

Preuve

i) Ce point est une conséquence de la formule de Trotter-Kato :

$$e^{(\overline{A}_R + B)t} = \lim_{n \to \infty} \left[e^{A_R t/n} \; e^{Bt/n} \right]^n ; \quad \text{où } B = K - \Sigma .$$

ii) Posons $\lambda = \sup\limits_{(x,v)} (K1 - \Sigma)$ et $m = \lambda - K1 + \Sigma$.

On a $m \geq 0$, notons Q l'opérateur :

$$Qu = Ku - (K1)u .$$

Il s'agit de montrer que :

$$\| e^{(\overline{A}_R + Q - m + \lambda)t} \|_1 \leq e^{\lambda t} .$$

C'est-à-dire :

$$\text{(2.5)} \quad \| e^{(\overline{A}_R + Q - m)t} \|_1 \leq 1 .$$

Or on sait que :

$$e^{\overline{A}_R t}\ 1 \leq 1 \ ,$$

$$e^{Qt}\ 1 = 1 \ ,$$

$$e^{-mt}\ 1 \leq 1 \ .$$

Et en utilisant la formule de Trotter on obtient (2.5) en effet :

$$e^{(\overline{A}_R + Q - m)t}\ 1 = \lim_{n \to \infty} \left[e^{A_R t/n}\ e^{Qt/n}\ e^{mt/n} \right]^n 1 \leq 1, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence de solution de (2.4).
Fixions t_o, réel positif.

<u>Théorème 1</u> Soit $\varphi \in L^2(X \times V) \cap L^\infty(X \times V)$ et $q \in L^2(o,t_o\ ; L^2(X \times V) \cap L^\infty(X \times V)$ alors il existe une solution u (au sens des distributions) de (2.4) unique dans W.
Et on a :

$$u \in C\,(o,t_o; L^2(X \times V)) \cap L^\infty(\,[o,t_o] \times X \times V\,)$$

<u>Preuve</u>

Notons W_o l'espace

$$(2.6) \quad W_o = \{\ \Psi \in L^\infty([o,t_o] \times V \times V) / \ \Psi\ ;\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + v.\nabla\Psi \in L^2(\ [o,t_o] \times X \times V) \text{ et } \Psi(t)_{|\Gamma+} = R^*\ \Psi(t)_{|\Gamma-} \}\ .$$

où l'on note par R^* l'opérateur de $L^2(\Gamma-)$ dans $L^2\ (\Gamma+)$ adjoint de R. D'après (1.5.) on a :

$$W_o \subset W\ ,$$

1 - Existence

Notons u la solution faible de (2.4) c'est-à-dire :

$$u(t) = \int_o^t e^{(\overline{A}_R + K + \Sigma)\ (t-s)} q(s)\ ds + e^{(\overline{A}_R + K - \Sigma)t} \varphi.$$

On a donc :

$$u \in C(o,t_o\ ;\ L^2\ (X \times V)$$

Et d'après la proposition précédente on a $u \in L^\infty(\ [o,t_o] \times X \times V)$ D'autre part on a :

$$D(\overline{A}_R\ ) = \{\ \Psi \in L^2\ (X \times V)\ /\ \exists\ \Theta \in L^2,\ (\Theta,\xi) = (\Psi\ ,-v\ \xi\ ) \qquad \forall\xi \in D(\overline{A}_R)\}$$

$$= \{\ \Psi \in L^2\ (X \times V)\ /\ \exists\ \Theta \in L^2,\ (\Theta,\xi) = (\Psi,\ -v\ \xi\ ) \qquad \forall\xi \in D(A_R)\}$$

$$\supset \{\ \Psi \in L^2\ (X \times V)_n\ L^\infty(X \times V)\ /\ v\nabla\Psi \in L^2(X \times V)\ \Psi_{|\Gamma+} = R^*\Psi_{|\Gamma-}\ \}\ ;$$

$$\overline{A}_R^{\ *}\Psi = v.\nabla\ \Psi\ .$$

Donc pour tout $\Psi \in W_o$, on a :

$$\begin{cases} \Psi(t) \in D(\overline{A}_R^{\ *}), & p.p.t\ ; \\ \overline{A}_R^{*}\varphi(.) \in L^2(\ [o,t_o] \times X \times V. & \end{cases}$$

Et d'après la propriété de la solution faible de (2.4) on a donc :

$$\text{(2.7)} \qquad \int_o^{t_o} (-u\ (t)\ ,\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} + v\nabla\Psi(t)\ +\ K\ \Psi\ (t)\ -\ \Sigma\ \Psi(t))_{L^2}\ +\ (\ \Psi(t)\ ,\ q(t)\ )_{L^2}\ dt$$

$$+\ (\varphi,\ \varphi(o))\ -\ (u(t_o),\ \Psi(t)) = 0$$

$$\forall\ \Psi \in W_o$$

En prenant Ψ très régulier nul sur ∂X, en o et t_o, on en déduit que (2.4-i) est satisfaisant au sens des distributions sur $[o,t_o] \times X \times V$. Et on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u = Ku - \Sigma u + q \quad \in \quad L^2([o,t_o] \times X \times V)$$

D'après (1.5) on a donc $u \in \mathcal{W}$. Et d'après la formule (1.6), on a donc pour tout Ψ dans W_o :

$$\int_o^{t_o}(u(t), \frac{\partial\Psi}{\partial t} + v\,\nabla\Psi + K^*\Psi - \Sigma\,\Psi) + (\Psi,q)\,dt = \int_o^{t_o}(u(t), \frac{\partial\Psi}{\partial t} + v\,\nabla\Psi) + (\Psi(t), \frac{\partial u}{\partial t} + v\,\nabla u)\,dt$$

$$= (u(t_o),\Psi(t_o)) - (u(o),\Psi(o)) + \int_o^{t_o} < u(t)_{|\Gamma+}, \Psi(t)_{|\Gamma+} >_{\Gamma+} - < u(t)_{|\Gamma-} - \Psi(t)_{|\Gamma-} >_{\Gamma-}\,dt$$

En rapprochant cela de (2.7) on obtient :

$$(\varphi - u(o), \Psi(o)) + \int_o^{t_o} < R\,u(t)_{|\Gamma_+} - u(t)_{|\Gamma-}, \Psi(t)_{|\Gamma_-} > dt = 0 \quad \forall\,\Psi \in W_o$$

D'où (2.4 - ii et iii)

2 - Unicité

Soit $u \in W$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\,\nabla u + \Sigma u = Ku \\ u(t)_{|\Gamma} = R\,u(t)_{|\Gamma} \\ u(o) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que $u = 0$. Appliquons à la formule (1.6) sur $[o,t_1]$ on obient :

$$2\int_0^{t_0} (u(t), K\,u(t) - \Sigma\, u(t))\, dt = \| u(t_1) \|^2 + \int_0^{t_1} \| u(t)_{|\Gamma+} \|^2_{L^2(\Gamma_+)} - \| R\,u(t)_{|\Gamma+} \|^2_{L^2\,(\Gamma_-)}\, dt$$

$$\geq \| u\,(t_1) \|^2 .$$

Cette inégalité étant une conséquence de (1.2 - iv). On en déduit

$$\| u(t_1) \|^2 \leq 2 \| K \| \int_0^{t_1} \| u(t) \|^2\, dt .$$

D'où u = 0, d'après le lemme de Gronwall C.Q.F.Q.

§ 3 - EQUATION DE TRANSPORT STATIONNAIRE. AUTRE TYPE D'EQUATIONS

Nous allons maintenant étudier des équations de transport stationnaires avec les mêmes conditions aux limites que précédemment. Mais pour cela il faut une hypothése supplémentaire qui implique que O n'est pas une valeur spectrale de l'opérateur de transport. On suppose donc qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

(3.1) $\int \sigma\,(x,v,v')\, dv' \leq \Sigma\,(x,v) - \alpha$,

(3.2) $\int \sigma\,(x,v',v)\, dv \leq \Sigma\,(x,v) - \alpha$.

L'inégalité (3.2) implique que le nombre de moyen de particules secondaires qui est $(\frac{1}{\Sigma} \int \sigma(x,v',v)dv')$ est inférieur à 1, donc l'opérateur est sous critique. On a alors :

<u>Théorème 2</u> Supposons (3.1) (3.2). Soit $\varphi \in L^2(X \times V)_n\, L^\infty(X \times V)$, alors il existe une solution u unique dans W pour l'équation :

$$\begin{cases} -v\,\nabla u + Ku - \Sigma u + \varphi = 0 , \\ u_{|\Gamma_-} = R\, u_{|\Gamma_+} . \end{cases}$$

et on a de plus : $u \in L^\infty(X \times V)$

Preuve

1 - Existence

Reprenons la démonstration de la préposition 4 ; comme (3.1) implique que : $K1 \leq \Sigma - \alpha$, on en déduit :

$$e^{(\bar{A}_R + K - \Sigma)t} 1 \leq e^{-\alpha t} .$$

Posons alors :

$$\psi(t) = e^{(\bar{A}_R + K - \Sigma)t} \varphi \quad ;$$

on a :

$$\|\psi(t)\|_{L^\infty} \leq e^{\alpha t} \|\varphi\|_{L^\infty} .$$

On peut donc poser

$$u = \int_0^{+\infty} \psi(t)\, dt \quad ;$$

et on aura $\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi\|_{L^\infty}$.

D'autre part, en utilisant (3.1) et (3.2) on vérifie que :

$$\iint f(v)f(v')\,\sigma(v,v')\,dv'\,dv \leq \left[\iint f(v')\sigma(v,v')\,dv\,dv'\right]^{1/2} \left[\iint f(v)\sigma(v,v')\,dv\,dv'\right]^{1/2} ;$$

$$((K - \Sigma)f,f) \leq \left[\int |f(v')|^2 (\Sigma(v')-\alpha)\,dv'\right]^{1/2} \left[\int |f(v)|^2 (\Sigma(v)-\alpha)\,dv\right]^{1/2}$$

$$- \int \Sigma\, |f(v)|^2\, dv \leq -\alpha \|f\|^2_{L^2} ; \qquad \forall u \in L^2(V) .$$

On en déduit que :

(3.4) $$-((\bar{A}_R + K - \Sigma) f,f) \geq \alpha \|f\|^2_{L^2} ; \forall f \in W \text{ t.q : } f_{|\Gamma_-} = R f_{|\Gamma_+}$$

A partir de (3.4) on pourrait en déduire l'existence de u dans $D(\overline{A}_R)$ vérifiant :

$$(\overline{A}_R + K + \Sigma)u = 0$$

Mais cela n'implique pas simplement (3.3).

En fait on déduit de (3.4) appliqué à $\psi(t)$ que l'on a :

$$\frac{d}{dt} \|\Psi(t)\|^2 \leq - \alpha \|\Psi(t)\|^2 \qquad \text{p.p.t}$$

Donc :

$$\|\Psi(t)\|^2 \leq e^{-\alpha t} \|\varphi\|^2$$

D'où $u \in L^2 (X \times V)$

Posons

$$u_n = \int_0^n \Psi(t)\, dt$$

Alors $u_n \to u$ dans L (X x V) et vérifie :

(3.6) $\quad \psi(n) - \varphi = \int_0^n \frac{d\Psi}{dt} dt = -v \nabla u_n + Ku_n - \Sigma u_n$

(3.7) $\quad u_n|_{\Gamma-} = R\, u_n|_{\Gamma+}$

D'après (3.6), comme $\Psi(n) \to 0$ dans $L^2(X \times V)$ on a quand $n \to \infty +$;

$$- v.\nabla u_n = \Psi(n) - \varphi - K u_n + \Sigma u_n \to - \varphi - Ku + \Sigma u \quad \text{dans } L^2$$

On voit que la limite de $(-v.\nabla u_n)$ est nécessairement $(-v.\nabla u)$. Donc on a :

(3.8) $\quad -v.\nabla u - K u + \Sigma u + \varphi = 0 \qquad u \in W$

Montrons maintenant que

(3.9) $\quad u|_{\Gamma-} = R\, u|_{\Gamma+}$

Il suffit de le montrer pour $\varphi \geq 0$. Or les suites $u_n|_{\Gamma-}$ et $u_n|_{\Gamma+}$ sont croissantes et majorées, elles convergent donc ponctuellement et dans $L^2(\Gamma-)$ et $L^2(\Gamma+)$. Donc on peut passer à la limite dans (3.7) et on obtient (3.9).

2 - Unicité

L'unicité est une conséquence immédiate de (3.4) C.Q.F.D.

Considérons maintenant un autre type d'équations d'évolution (qui sont des équations adjointes d'équations du type (2.4)). Pour tout $x \in \partial\Omega$ définissons l'opérateur de $B(\Gamma_{x-})$ dans $B(\Gamma_{x+})$ par :

$$R'_x \Psi(v) = \int_{\Gamma x} \Psi(w) \quad \pi_x(v,dw) \qquad \forall \; \Psi \in B(\Gamma_{x-})$$

avec

(3.10)
$$\begin{cases} \text{i)} & \pi_x(v,.) \text{ est une mesure positive sur } \Gamma_{x-} \text{ telle que } \pi_x(v,\Gamma_{x-}) \leq 1 \,; \\ \text{ii)} & \forall A \quad \Gamma_{x-} \quad (x,v) \to \pi_x(v,A) \text{ est mesurable} \,; \\ \text{iii)} & \text{si} \quad \Psi = \Psi \quad \mu\text{-p.p. alors } R'_x \Psi_1 = R'_x \Psi_2 \quad \text{p.p.p. sur } \Gamma_{x-} \,; \\ \text{iv)} & \int [\int_\Gamma \Psi(x,w) \; \pi_x(v,dw)]^2 \, |n_x.v| \, d\gamma(x) \, d\mu(v) \leq \int_\Gamma \Psi(x,v) |n_x.v| d\gamma(x) \, d\mu(v), \\ & \forall \Psi \in L^2(\Gamma) . \end{cases}$$

Alors si $h \in L^2(X \times V)_n \; L^\infty(X \times V)$ et $g \in L^2(o,t_o \,;\, L^2(X \times V)_n \; L^\infty(X \times V))$, il existe une solution (au sens des distributions) u, unique dans W pour l'équation

$$(3.11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v \nabla u + \Sigma u = K'u + g \,, \\ u(t)|_{\Gamma+} = R' \; u(t)|_{\Gamma-} \,, \\ u(o) = h \,. \end{cases}$$

Et on a : $u \in C(o,t_o, L^2(X \times V)) \cap L^\infty(\; o,t_o \;\; X \times X \times V)$.

[En effet, il suffit de remplacer v en -v et Γ_+, Γ_- en Γ_- , Γ_+ dans la construction du semi groupe G_t, et de remplacer $\sigma(x,v',v)$ par $\sigma(x,v,v')$ dans la démonstration du théorème 1]

D'autre part dans les deux cas suivants :

- cas de la réflexion spéculaire c'est-à-dire

$$R_x \Psi(x,v) = \Psi(x,v -2(\nu_x.v)\ \nu_x) \qquad \forall\ \Psi \in B(\Gamma_{x+})$$

- ou dans le cas où π_x admet une densité c'est-à-dire

$$R_x \Psi(x,v) = \int_{\Gamma x+} \Psi(x,w)\ \rho_x(v,w)\ \nu_x.w\ d\mu\ (w)$$

avec $\iint \rho_x(v,w)^2\ (\nu_x.v)\ |\nu_x.w|\ dv\ dw \leq 1$ (donc R satisfait (2.10))

alors en notant R'_x l'opérateur de $L^2(\Gamma_{x-})$ dans $L^2(\Gamma_{x+})$ adjoint de R_x, on voit que R'_x satisfait (3.10). Et on peut écrire une relation de dualité entre la solution de (2.4) et celle de (3.10).

De la même façon que pour le théorème 2, en supposant (3.1) et (3.2) on montre que si $h \in L^2(X \times V) \cap L^\infty(X \times V)$ il existe une solution u unique dans W pour l'équation :

$$(3.12)\begin{cases} v.\nabla u + K'u - \Sigma u + h = 0 \\ u_{|\Gamma+} = R'\ u_{|\Gamma-} \end{cases}$$

APPENDICE. APPROXIMATION EQUATION DE TRANSPORT-EQUATION DE DIFFUSION

L'approximation des équations de transport par des équations de diffustion dans le cas des conditions aux limites d'absorbtion est classique (Voir par exemple Blankenship - Papanicolaou [1] pour un domaine d'évolution des particules égal à R^N, et Sentis [1] , Bensoussan - Lions - Papanicolaou [1] pour des domaines plus généraux et des structures périodiques). Dans ce dernier article on traite aussi le cas des conditions aux limites de réflexion mais uniquement dans le cadre de l'hypothèse (3.13 - ii) ci-dessous. Nous énonçons ici un résultat de ce type valable avec deux hypothèses différentes pour R :

R vérifie l'alternative suivante :

$$(3.13) \qquad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{i)} & \pi_x(v,.) = \delta_{v-2(\nu_x.v)\,\nu_x} \; ; \\ \\ \text{ii)} & \pi_x(v, \Gamma_{x+}) = 1 \text{ et } \forall\, b > 0 \quad \exists\, \pi_b > 0 \;/ \\ & \pi_x\,(v, \{\, w/\ \nu_x.w \;\geq b\}) \;\geq\; \pi_b \;. \end{cases}$$

Faisons en outre les hypothèses suivantes (on note $C_b^2\ (X)$ l'espace des fonctions bornées sur X, dont les dérivées premières et secondes sont bornées sur X). Prenons V la sphère S^{N-1} muni de la mesure de probabilité uniforme.

Soit $\Sigma_o \in C_b^2\ (X)$,

$f \in L^\infty(V \times X)$,

$\gamma \in C_b^2\ (X)$.

On suppose que :

$$f(v,v') = f(v',v) \; ;$$

$$\int f(v,v')\, dv' = 1 \; ;$$

$$\exists \alpha > 0 \quad \beta \geq 0 \;, \qquad \alpha \in f(v,v') \leq \beta \;, \qquad \alpha < \Sigma_o(x) < \beta \;.$$

Soit ε positif ; on pose :

$$\sigma\,(x,v,v') = \frac{1}{\varepsilon^2}\, \Sigma_o\,(x) \quad f(v,v') \; ; \qquad \Sigma(x,v) = \frac{1}{\varepsilon^2}\, \Sigma_o(x) + \gamma(x) \;.$$

et on remplace l'opérateur $-v\,\nabla.$ par $-\frac{1}{\varepsilon}\, v\,\nabla.$ Soit $u_I \in C_b^2\ (X)$. D'après le théorème 1 on sait qu'il existe une solution u_ε unique dans W pour l'équation :

$$(3.14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{-1}{\varepsilon}\, v\, \nabla\, u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\, \Sigma_o\, (K_o - I)\, u_\varepsilon + \gamma\, u_\varepsilon \\ u_\varepsilon(t)|\Gamma - = R\, u_\varepsilon(t)|\Gamma + \\ u_\varepsilon(o) = u_I \end{cases}$$

<u>Proposition. Il existe des vecteurs</u> b_x <u>(dépendants de</u> $x \in \partial\Omega$) <u>tels que</u> $\nu_x . b_x \geq o$ <u>et une matrice symétrique N x N strictement positive</u> $a_{ij}(x)$ <u>tels que</u> $a_{ij} \in C_b^2(X)$.

<u>Et si</u> $u_{I|\partial\Omega} = 0$ <u>et u est la solution de</u> :

$$(3.15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \gamma(x)\, u(x) \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0,x) = u_I(x) \end{cases}$$

<u>Alors la solution</u> u_ε <u>de (3.14) vérifie pour tout X' compact inclus dans X</u> :

$$(3.16)\quad \sup_{x \in X'} \left|u_\varepsilon(t,x,v) - u(t,x)\right| \leq \varepsilon\, C^{te}\, e^{\delta t}\, (1 + t) \qquad \delta = \sup(0, \sup_x \gamma(x))$$

<u>Dans le cas où f = 1 et R est la réflexion spéculaire alros</u> $b_x = \nu_x$ <u>et on peut remplacer X' par X dans (3.16)</u>

Pour ce dernier cas voir la démonstration dans Santos [1]

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - C. BARDOS [1] , Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du 1er ordre ..., thèse Paris 1969, Ann. Sc. Ecole Normale 4 (1969) III

[2] , Cours sur les semi-groupes.

- 2 - A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU [1] , Boundary layers and homogénization of transport process, J. Publ. R.I.M.S., Kyoto University 15 (1979) p. 53-157.

- 3 - T. KATO [1] , Perturbation theory for linear operator(2nd ed), Springer, Berlin, 1976.

- 4 - R. SENTIS [1] , Analyse asymptotique d'équation de transport, Thèse d'Etat, Université Paris-Dauphine, (1981).

- 5 - R. SANTOS [1] , Thèse de 3e cycle, Université Paris-Nord-Villetaneuse, (1980).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique